Tentamen Statistische Fysica 6-04-2009

Opgave 1

Een spinsysteem heeft een tweevoudig ontaarde grondtoestand en een drievoudig ontaarde aangeslagen toestand bij energie ε. De wisselwerking tussen de spins is zo klein dat ze als onafhankelijk mogen worden beschouwd. Het totale aantal spins wordt aangeduid met N, het aantal spins in een aangeslagen toestand wordt aangeduid met n.

a) Maak aannemelijk dat het aantal microtoestanden gegeven wordt door:

$$\Omega(n) = \frac{N!\,2^{N-n}\,3^{n}}{(N-n)!\,n!}$$

b) Bereken de energie E van dit systeem (in termen van ε, k, T en N) met behulp van de microkanoniek ensemble methode.

c) Bereken de kanonieke toestandssom van dit systeem en bereken met behulp hier eveneens de energie E van het systeem.

d) Bereken de warmtecapaciteit c_v van dit systeem.

Opgave 2

Beschouw een klassiek ideaal gas, bestaande uit N twee atomige moleculen met massa m en traagheidmoment I.

De toestandsdichtheid in de impulsruimte wordt gegeven door: $f(p)dp = \dfrac{V4\pi p^2 dp}{h^3}$

De energieniveaus van de rotaties worden gegeven door:

$$\varepsilon_r = \frac{\hbar^2}{2I} r(r+1), \quad r = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

Het energieniveau ε_r is (2r +1)-voudig ontaard.

De temperatuur is zodanig dat $kT << \dfrac{\hbar^2}{2\,I}$

a) Laat zien dat de eendeeltjes toestandssom van dit gas (bij benadering) gegeven wordt door: $V\left(\dfrac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\left\{1+\exp\left(\dfrac{\hbar^2}{kTI}\right)\right\}$

b) Geef de totale toestandssom van dit gas.

c) Leid een uitdrukking af voor de entropie S^{rot} die samenhangt met de rotatie van de moleculen in dit gas.

Opgave 3

a) Laat zien dat voor de fluctuaties $\Delta E \left(= \sqrt{\overline{(E - \overline{E})^2}} \right)$ in de energie E van een systeem dat in contact is met een warmtebad geldt dat $\Delta E = \sqrt{kT^2 c_v}$

Hierin is c_v de warmtecapaciteit van het systeem.

Hint: Bekijk $\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2}$ $= (\Delta E)^2$

b) Maak aannemelijk dat de relatieve fluctuaties in de energie voor een macroscopisch systeem zeer klein zijn.

Opgave 4

a) De relatie tussen twee punten (P_1, T_1) en (P_2, T_2) op de dampspanningslijn van een stof wordt gegeven door $P_2 = P_1 \exp\left(\frac{\Delta_{vap} H}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \right)$.

Geef een afleiding van deze uitdrukking uitgaande van de wet van Clausius-Clapeyron. Welke benaderingen worden hierbij gemaakt ?

b) De verdampingsenthalpie van water bedraagt $\Delta_{vap}H = 40,66$ kJ/mol.
Bereken het kookpunt van water bij P = 2 atm.

Opgave 5

Beschouw een *twee*dimensionaal gas van vrije bosonen met oppervlak A.

a) Laat, uitgaande van de Bose-Einstein distributie, zien dat bij $T \to 0$ (nagenoeg alle deeltjes in de grondtoestand) de chemische potentiaal gegeven wordt door:

$$\mu = -\frac{kT}{N}$$

b) Voor deeltjes die niet in de grondtoestand zitten mag μ ten opzichte van ε verwaarloosd worden.
Maak aannemelijk dat het totale aantal deeltjes geschreven kan worden als:

$$N = n_1 + \frac{A\, 2\pi m}{h^2} \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$

Hierin is n_1 het aantal deeltjes in de grondtoestand en m de massa van de deeltjes.
Opm.: de *drie*dimensionale toestandsdichtheid in de impulsruimte wordt gegeven door: $f(p)dp = \frac{V 4\pi p^2 dp}{h^3}$

c) Onderzoek of in dit tweedimensionale gas Bose-Einstein condensatie kan optreden. Zo ja, bereken de kritische temperatuur T_c. Zo nee, laat zien waarom niet.

Physical constants:

Getal van Avogadro: $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}\ mol^{-1}$

Constante van Planck: $h = 6{,}626 \times 10^{-34}$ Js

$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}055 \times 10^{-34}$ Js

Constante van Boltzmann: $k = 1{,}381 \times 10^{-23}\ J\,K^{-1}$

Gasconstante: $R = 8{,}315\ J\,mol^{-1}\,K^{-1}$

Lichtsnelheid: $c = 3 \times 10^{8}\ m\,s^{-1}$

Rustmassa elektron: $m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg

Rustmassa proton: $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg

Bohr magneton: $\mu_B = 9{,}27 \times 10^{-24}\ A\,m^2$

Integrals:

n	$\int_0^\infty dx\, x^n e^{-ax^2}$ (a > 0)	$\int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^x - 1}$	$\int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^x + 1}$	$\int_0^\infty \frac{x^n e^x}{(e^x - 1)^2}$	$\int_0^\infty x^n \ln(1 - e^{-x}) dx$
0	$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)}$	diverges	ln 2	diverges	$-\frac{\pi^2}{6}$
1/2	$\frac{0{,}6127}{a^{3/4}}$	$2{,}612 \frac{\sqrt{\pi}}{2}$	0,6781	diverges	$-1{,}341 \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
1	$\frac{1}{2a}$	$\frac{\pi^2}{6}$	$\frac{\pi^2}{12}$	diverges	-1,202
3/2	$\frac{0{,}4532}{a^{5/4}}$	$1{,}341 \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	1,153		$-1{,}127 \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$
2	$\frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$	2,404	1,803	$\frac{\pi^2}{3}$	$-\frac{\pi^2}{45}$
5/2	$\frac{1{,}662}{a^{7/4}}$	$1{,}127 \frac{15\sqrt{\pi}}{8}$	3,083		-3,505
3	$\frac{1}{2a^2}$	$\frac{\pi^4}{15}$	$\frac{7\pi^4}{120}$	7,212	-6,221
7/2	$\frac{0{,}5665}{a^{9/4}}$	12,268	11,184		
4	$\frac{3\sqrt{\pi}}{8a^{5/2}}$	24,886	23,331	$\frac{4\pi^4}{15}$	

docent/spreker |

onderwerp |

datum |

Uitwerking tentamen statistische fysica 21-04-09

1a) mogelijkheden n over N verdeelt $\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$

3 mogelijkheden per deeltje voor aangeslagen toestand $\Rightarrow$ maal 3^n

2 mogelijkheden per deeltje in de grondtoestand, $N-n$ in de grondtoestand $\Rightarrow$ maal 2^{N-n}

1b) (P.50,51)

$E = n\varepsilon \qquad \Omega(n) = \frac{N!\,2^{N-n}\,3^n}{(N-n)!\,n!} \qquad S = k\ln(\Omega(n))$

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial E}$$

$$\frac{\partial n}{\partial E} = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial S}{\partial n} = k\frac{\partial}{\partial n}\ln\left(\frac{N!\,2^{N-n}3^n}{(N-n)!\,n!}\right)$$

$$= k\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln N! + \ln 2^{N-n} + \ln 3^n - \ln((N-n)!) - \ln(n!)\right)$$

$$= k\frac{\partial}{\partial n}\Big[N\ln(N) - N + (N-n)\ln 2 + n\ln 3 - (N-n)\ln(N-n) + (N-n) - n\ln n + n\Big]$$

$$= k\Big[0 - 0 - \ln 2 + \ln 3 + \ln(N-n) + \underbrace{\frac{(N-n)}{(N-n)}}_{=1} - 1 - \ln(n) - \underbrace{\frac{n}{n}}_{=1} + 1\Big]$$

$$= k\left[\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln(N-n) - \ln(n)\right] = k\ln\left(\frac{3(N-n)}{2n}\right)$$

$$\frac{1}{T} = \frac{k}{\varepsilon}\ln\left(\frac{3(N-n)}{2n}\right) \Rightarrow \frac{\varepsilon}{kT} = \ln\left(\frac{3(N-n)}{2n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}e^{\varepsilon\beta} = \frac{2}{3}\frac{3(N-n)}{2n} = \frac{N}{n} - 1 \Rightarrow \frac{N}{n} = \frac{2}{3}e^{\varepsilon\beta} + 1$$

$$\Rightarrow n = \frac{N}{\frac{2}{3}e^{\varepsilon\beta} + 1} \Rightarrow E = \frac{N\varepsilon}{\frac{2}{3}e^{\varepsilon\beta} + 1} = \frac{3N\varepsilon}{2e^{\varepsilon\beta} + 3}$$

docent/spreker |

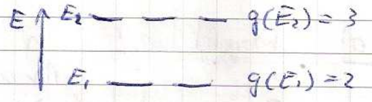
onderwerp |

datum |

1c) (P.56)

$$Z_1 = \sum_{E_r} g(E_r)\, e^{-\beta E_r} = 2 + 3e^{-\beta \varepsilon}$$

$$P(E_2) = \frac{1}{Z_1}\, g(E_2)\, e^{-\beta E_2} = \frac{3e^{-\beta\varepsilon}}{2+3e^{-\beta\varepsilon}}$$



$$E = N \cdot P_{E_2} \cdot \varepsilon = \frac{3N\varepsilon e^{-\beta\varepsilon}}{2+3e^{-\beta\varepsilon}} = \frac{3N\varepsilon}{2e^{\beta\varepsilon}+3}$$

1d) (P.19)

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \cancel{\left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{3N\varepsilon}{2e^{\varepsilon/kT}+3}\right)_V} = \frac{dE}{d\beta}\frac{d\beta}{dT}$$

$$= 3N\varepsilon \left(\frac{-1}{2e^{\beta\varepsilon}+3}\right)^2 2e^{\beta\varepsilon}\,\varepsilon$$

$$C_V = \frac{6N\varepsilon^2 e^{\beta\varepsilon}}{kT^2\left(2e^{\beta\varepsilon}+3\right)^2}$$

docent/spreker |

onderwerp |

datum |

2a) foutje in de opgave,

antwoord moet zijn: $V\left(\frac{2\pi m k T}{h^2}\right)^{3/2}\left(1 + 3e^{-\frac{\hbar^2}{2kI}}\right)$

(eq 7.13) $Z_1 = Z_1^{tr} Z_1^{rot}$

$$Z_1^{tr} = \sum_r e^{-\beta E_r} = \int \frac{V 4\pi p^2 dp}{h^3} e^{-\frac{p^2}{2mkT}}$$

(eq 7.19) $$= \frac{V 4\pi}{h^3} \cdot \frac{1}{4} 2mkT\sqrt{2\pi mkT} = V\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}$$

integralen blad: $n = 2$

$a = \frac{1}{2mkT}$

$$Z_1^{rot} = \sum_r e^{-\beta E_{rot}} = \sum_r (2r+1) e^{-\beta \frac{\hbar^2}{2I} r(r+1)}$$

$$= \sum_{E_r} g(E_r) e^{-\beta E_r}$$

Voor lage temperatuur T zijn alleen de grondtoestand en eventueel de 1e (en 2e) aangeslagen toestand bezet,
dwz $r = 0$, $r = 1$

$$Z_1^{rot} = 1 + 3e^{-\beta \frac{\hbar^2}{I}}$$

2b) $$Z = \frac{1}{N!}(Z_1^{tr})^N (Z_1^{rot})^N$$
(eq 7.11)

$$= \frac{1}{N!}\left\{V^N\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3N/2}\left(1 + 3e^{-\beta\frac{\hbar^2}{I}}\right)^N\right.$$

docent/spreker |

onderwerp |

datum |

2c) $S = -\frac{\partial F}{\partial T} \qquad F = -kT \ln Z$

$$S^{rot} = \frac{\partial}{\partial T}\left(kT \ln Z^{rot}\right) = Nk \frac{\partial}{\partial T}\left(T \ln Z_1^{rot}\right)$$

$$= Nk \left\{ \ln\left(1 + 3e^{-\frac{\beta \hbar^2}{I}}\right) + T \frac{1}{Z_1^{rot}} \cdot \frac{\partial Z_1^{rot}}{\partial T} \right\}$$

$$= Nk \left\{ \ln\left(1 + 3e^{-\frac{\hbar^2}{kTI}}\right) + \frac{3\hbar^2}{kTI}\left(\frac{e^{-\frac{\hbar^2}{kTI}}}{1 + 3e^{-\frac{\hbar^2}{kTI}}}\right)\right\}$$

$$\frac{T}{Z_1^{rot}} \cdot \frac{\partial Z_1^{rot}}{\partial T} = \frac{T}{1 + 3e^{-\frac{\hbar^2}{kTI}}} \cdot 3e^{-\frac{\hbar^2}{kTI}} \cdot \frac{\hbar^2}{kT^2 I}$$

$$= Nk \left\{ \ln\left(1 + 3e^{-\frac{\hbar^2}{kTI}}\right) + \frac{3\hbar^2}{kTI} \cdot \left(\frac{1}{e^{\hbar^2/kTI} + 3}\right)\right.$$

docent/spreker |

onderwerp |

datum |

3a)
(P.57)

$$(\Delta E)^2 = \overline{(E-\bar{E})^2} = \overline{E^2 - 2E\bar{E} + \bar{E}^2} = \overline{E^2} - \bar{E}^2$$

$$\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right) = \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right)$$

$$= -\frac{1}{Z^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right)^2 + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}$$

$$Z = \sum_r e^{-\beta E_r} \rightarrow \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \sum_r (-E_r) e^{-\beta E_r}$$

$$\rightarrow \frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{-\sum (E_r) e^{-\beta E_r}}{Z} = -\bar{E}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} = \sum_r (-E_r)^2 e^{-\beta E_r} \rightarrow \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} = \overline{E_r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} = \overline{E^2} - \bar{E}^2 = (\Delta E)^2$$

$$\left[= -\frac{\partial \bar{E}}{\partial \beta} = -\frac{\partial \bar{E}}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial \beta} = -(-kT^2)C_V\right] = C_V k T^2$$

$$\rightarrow \Delta E = \sqrt{C_V k T^2}$$

3b)
(P.58)

Relatieve fluctuaties: $\dfrac{\Delta E}{\bar{E}} = \dfrac{\sqrt{C_V k T}}{\bar{E}} \sim \dfrac{\sqrt{N}}{N} = \dfrac{1}{\sqrt{N}}$

C_V en $\bar{E}$ zijn extensieve grootheden en dus evenredig met N

Voor een macroscopisch systeem is $N \propto 10^{23} \Rightarrow \dfrac{\Delta E}{\bar{E}} \sim 10^{-11}$

Dus de relatieve fluctuaties zijn erg klein.

4a) (P.228) (P.231/232)

Clausius Clapeyron : $\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta S}{\Delta V}$

benaderingen : - het gas is ideaal $PV_2 = RT$

- Volume van de vloeistof wordt verwaarloost $\Delta V = V_2 - V_1 \simeq V_2$

$$\Delta S = \frac{L_{12}}{T} = \Delta_{vap} H$$

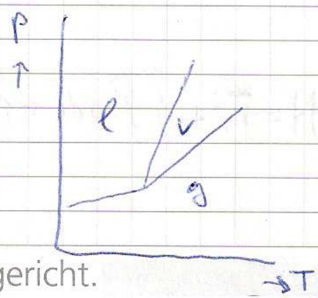
$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{\Delta_{vap} H}{T \cdot V_{gas}} = \frac{\Delta_{vap} H}{T} \frac{P}{RT}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{1}{P} dp \underset{\uparrow}{=} \frac{\Delta_{vap} H}{R} \int_1^2 \frac{1}{T^2} dT = \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = \frac{\Delta_{vap} H}{R} \underbrace{\left[-\frac{1}{T}\right]_{T_1}^{T_2}}_{= \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}}$$

(aanname : $\Delta_{vap} H \neq \Delta_{vap} H(T)$)

$$\Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \exp\left[\frac{\Delta_{vap} H}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow P_2 = P_1 \exp\left[\frac{\Delta_{vap} H}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right]$$



4b) $\Delta_{vap} H = 40{,}66 \; k \cdot 10^3$ J/mol

$R = 8{,}315$ J/mol/K

$P = 1$ atm $\Rightarrow$ kookpunt water : 373.16 K

$P = 2$ atm $\Rightarrow$ " " ?

invullen : $\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = \frac{\Delta_{vap} H}{R T_1} - \frac{\Delta_{vap} H}{R T_2}$

$$T_2 = \frac{1}{\frac{1}{T_1} - \frac{R}{\Delta_{vap} H} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)} = 1 \Big/ \left(\frac{1}{373{,}16} - \frac{8{,}315}{40{,}66 \cdot 10^3} \ln(2)\right) = 394{,}0 \text{ K}$$

$= 121$ °C

docent/spreker |
onderwerp |
datum |

5d)

(eq 11.26) $n = \dfrac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1}$

$T \to 0 \quad n(0) = N \qquad N = \dfrac{1}{e^{-\beta\mu}-1}$

$Ne^{-\beta\mu} - N = 1 \to e^{-\beta\mu} = \dfrac{N+1}{N}$

$e^{-\beta\mu} = 1 + \dfrac{1}{N} \to -\beta\mu = \ln\left(1+\dfrac{1}{N}\right) \simeq \dfrac{1}{N}$

$\to \mu \simeq -\dfrac{1}{\beta N} = -\dfrac{kT}{N}$

alternatief

(eq 11.26) $\bar{n}_i = 1/(e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}-1) \qquad$ (taylor $e^x \simeq 1+x \quad x \ll 1$)

$T \to 0 \qquad \bar{n}_1 = N = \dfrac{1}{(e^{-\beta\mu}-1)} \simeq \dfrac{1}{(1-\beta\mu-1)}$ $\quad (\varepsilon_1 = 0)$

(nagenoeg alle deeltjes in de grondtoestand)

$= \dfrac{1}{-\beta\mu} = -\dfrac{1}{\frac{\mu}{kT}} = -\dfrac{kT}{\mu} \Rightarrow \mu = -\dfrac{kT}{N}$

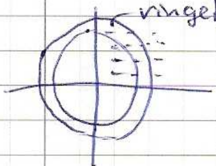
5b)

$N = \int_0^\infty n(\varepsilon) f(\varepsilon)\, d\varepsilon = n_1 + \int_0^\infty \dfrac{A\,2\pi}{h^2} m \, d\varepsilon \, \dfrac{1}{e^{\beta\varepsilon}-1}$

(verwaarloos μ voor de aangeslagen toestanden)

$\left(f(p)\,dp = \dfrac{V\,4\pi\,p^2\,dp}{h^3} \quad (3\,\text{dim}) \right.$
(bolschil in 3D p-ruimte) $\left.\right)$

ringetje in 2D p-ruimte



$f(p)\,dp = \dfrac{A\,2\pi\,p\,dp}{h^2} \quad (2\,\text{dim})$

$\varepsilon = \dfrac{p^2}{2m} \to (p = \sqrt{2\varepsilon m})$

$\dfrac{d\varepsilon}{dp} = \dfrac{2p}{2m} \to dp = \dfrac{m}{p} d\varepsilon$

$f(\varepsilon)\,d\varepsilon = \dfrac{A\,2\pi\,p}{h^2}\dfrac{2m}{2p} d\varepsilon = \dfrac{A\,2\pi\,m}{h^2} d\varepsilon$

$\bar{n}(\varepsilon) = 1/(e^{\beta\varepsilon}-1)$

docent/spreker |

onderwerp |

datum |

5c) $n_1 > 0 \rightarrow N - \int_0^\infty \frac{A 2\pi m}{h^2} \frac{d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon}-1} > 0$

(n_1 macroscopisch groter dan nul)

$$N - \frac{2\pi A m k T}{h^2} \int_0^\infty \frac{dx}{e^x - 1} > 0 \qquad x \equiv \beta\varepsilon$$

↳ kan alleen als $T = 0$, daarom kan er geen bose einstein condensatie optreden.

$\left(f(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{A 2\pi m}{h^2} d\varepsilon \qquad d\varepsilon = kT\, dx \right)$

[F. v. Steenwijk was niet zeker van de fysisch correctheid van de oplossing i.v.m. interacties die niet meegenomen worden]